数理解析研究所講究録
106巻 1971年 153-166



# Generalized Korteweg-de Vries Equation について

早大 理工　　堤 正義

## §1. 序

Korteweg-de Vries (KdV) equation

(1.1) $$u_t - uu_x + \delta u_{xxx} = 0, \qquad \delta \neq 0$$

は nonlinear dispersive wave propagation を記述する最も簡単なモデル方程式として、浅水波、プラズマ、非線形格子振動系等の研究に関連して重要な意味を持つと考えられている（例えば [1], [2] を参照）。

[3] において Sjöberg は KdV equation の初期値問題及び初期値－周期境界値問題が適当な初期条件の下に大域的古典解を持つことを示した（他に Kametaka [4], Teman [5] の研究がある）。

非線形項をより一般化する試みとしては

(1.2) $$u_t - u^p u_x + \delta u_{xxx} = 0, \quad \delta \neq 0, \quad p = 2, 3, 4, \cdots$$

に関して $p=2$ の場合に、Mukasa-Iino [6], Kametaka [4]

$p=3$ の場合に Masuda [7] の研究がある．

本稿では，さらに一般にした

$$(1.3) \qquad u_t - (f(u))_x + \delta u_{xxx} = 0, \qquad \delta > 0$$

に対して，その初期値問題及び初期値－周期境界値問題が，適当な初期条件と非線形項 $f(u)$ に対する条件の下で大域解を持ち，且つ初期条件の滑らかさが解 $u$ についても落ちない事を証明する．ここで非線形項 $f(u)$ に対する条件は，$\delta \neq 0$ の時今までの結果をすべて含み，$\delta > 0$ の時 $f(u) = u^{2q+1}$，$q = 1, 2, \cdots$ $f(u) = e^u$ 等を含むものである．

証明方法は "the method of vanishing dissipation" に依る．すなわち，初めに (1.3) 式に dissipative term を加えた式

$$(1.4) \qquad u_t - (f(u))_x + \delta u_{xxx} = \mu u_{xx}, \qquad \delta, \mu > 0$$

に対する大域解を iteration と a priori 評価によって構成し次に $\mu \to 0$ の極限として (1.3) 式の大域解の存在を証明する．

## §2. nonlinear dissipative－dispersive equation と the method of vanishing dissipation.

$H^s(R^1)$ ($s$: integer) を通常の Sobolev space とし，そのノルムを $\|\cdot\|_s$ で示す．$\|\cdot\| = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2(R^1)}$ とする．

$L^p(0,T;X)=\{f \mid f:(0,T)\longrightarrow X$ measurable

$\quad (\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt)^{1/p} < \infty \qquad 1\leq p<\infty$

$\quad \sup_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_X < \infty \qquad p=\infty$

$X$: Banach space

$C^m[0,T;X]$ = $m$ 回連続的微分可能な関数 : $[0,T]\longrightarrow X$

とする.

さて，初期値問題

$$(2.1)\quad \begin{cases} u_t-(f(u))_x+\delta u_{xxx}=\mu u_{xx}, & \delta,\mu>0 \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases}$$

を考える.

もし $f(0)\neq 0$ ならば $f(u)$ のかわりに $\hat{f}(u)=f(u)-f(0)$ と置いて，初期値問題

$$(2.1')\quad \begin{cases} u_t-(\hat{f}(u))_x+\delta u_{xxx}=\mu u_{xx}, & \delta,\mu>0 \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases}$$

を考えれば良いから，(2.1) において $f(0)=0$ と仮定しておく.

始めに，次の局所的存在定理を証明する.

<u>定理 1</u>

$f\in C^{3(m+1)}(R^1)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ とする. このとき，全ての初期値 $u_0(x)\in H^{3(m+1)}(R^1)$ に対して，正数 $T_m$ が存在して，区間 $0\leq t\leq T_m$ において，問題 (2.1) は一意的な解

$u(x,t) \in L^\infty(0,T_m; H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T_m; H^{3m}(R^1)] \cap \cdots \cap C^m[0,T_m; L^2(R^1)]$
を持つ．

<u>定理１の証明</u>

次の様に近似解の列 $\{u^n(x,t)\}$ を構成する：

$$(2.2)\quad \begin{cases} u^n_t - (f(\phi + u^{n-1}))_x + \delta u^n_{xxx} = \mu u^n_{xx}, \quad \delta, \mu > 0, \quad u^0(x,t) \equiv 0, \\ u^n(x,0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

但し，$\phi(x,t)$ は初期値問題

$$(2.3)\quad \begin{cases} \phi_t + \delta \phi_{xxx} = \mu \phi_{xx}, \qquad \delta, \mu > 0 \\ \phi(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

の解である．

近似解の評価の為に次の３つの補題が必要である．

補題１　（合成関数の滑らかさ）

$f(u) \in C^k(R^1)$，$f(0) = 0$，$(k = 1, 2, \cdots)$ とする．

もし $u(x,t) \in L^\infty(0,T; H^k(R^1))$ ならば $f(u(x,t)) \in L^\infty(0,T; H^k(R^1))$

であって，次の不等式を満足する：

$$(2.4)\qquad \|f(u(t))\|_1 \leq C_1 M_1 \|u(t)\|_1$$

$$(2.5)\qquad \|f(u(t))\|_k \leq C_k M_k (1 + \|u(t)\|_{k-1}^{k-1}) \|u(t)\|_k \quad \text{for } k \geq 2$$

ここで，$M_k = \max_{\alpha=1,2,\cdots,k} \sup_{U} |d^\alpha f(u)/du^\alpha|$，$U = \{u;\, |u| \leq \sup_{\substack{x \in R^1 \\ 0 \leq t \leq T}} |u(x,t)|\}$

$C_k$：正の定数

である．

補題2.

$u_0(x) \in H^{3(m+1)}(R^1)$ ならば，$\phi(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)]$ （T：任意の正の数）であって，不等式

(2.6) $$\|\phi(t)\|_k \leqslant \|u_0\|_k \qquad k=0,1,\cdots,3(m+1)$$

が成り立つ．

次に初期値問題

(2.7) $$\begin{cases} \psi_t-(a(x,t))_x+\delta\psi_{xxx}=\mu\psi_{xx}, \\ \psi(x,0)=0 \end{cases}$$

を考える．ここで $a(x,t)$ は既知関数とする．

補題3.

$a(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)]$ ならば，

$\psi(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)]$ であって，

$0 \leqslant t \leqslant T$ において

(2.8) $$\|\psi(x,t)\|_k \leqslant C_k'\sqrt{t}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|a(\tau)\|_k, \quad k=0,1,\cdots,3(m+1)$$

となる．但し $C_k'$ は正の定数．

補題1，2，3を用いれば

(2.9) $$u^n(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)]$$

を得る．さらに $n$ と $k$ に関する帰納法によって次の命題が成り立つ．

命題1.

ある正の数$T_k'$が存在して，区間$0\leqslant t\leqslant T_k'$において

$$\|v^n(t)\|_k \leqslant L_k, \quad k=0,1,\cdots,3(m+1). \tag{2.10}$$

但し，$L_k$は$n$には依存しない正の定数である．

補題1～3を用い，命題1で得た$v^n$に対する評価を使えば容易に次の命題が得られる．

命題2.

ある正の数$T_k$が存在して，$0\leqslant t\leqslant T_k$において

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_k}\|u^{n+1}-u^n\|_k^2 \leqslant \rho \sup_{0\leqslant t\leqslant T_k}\|u^n-u^{n-1}\|_k^2, \quad 0<\rho<1 \tag{2.11}$$

$$k=0,1,\cdots\cdots,3(m+1).$$

命題2から直ちに

$$u^n \longrightarrow u \text{ in } L^\infty(0,T_m;H^{3(m+1)}(R^1))\cap C[0,T_m;H^{3m}(R^1)]$$

が従う．後は方程式(1.4)を見れば，定理1が結論される．

（証明終り）

$f(u)$に適当な条件を加えれば，次のa priori評価が得られる．

定理2

$f$は定理1の条件の外に，次の2つの条件の内いずれか1

つを満たすとする：

条件A.　$df(u)/du \geqq 0$,　$F(u)=\int_0^u f(v)dv \geqq 0$

条件B.　$|f(u)| \leqq K(|u|+u^2+|u|^3+u^4)$.　Kは正の定数

このとき，問題(2.1)の解 $u(x,t)$ に対し，a priori 評価

$$\sup_{0\leqq t\leqq T} \|u\|_k \leqq l(\|u_0\|_k) \qquad k=0,1,\cdots,3(m+1) \tag{2.12}$$

が成り立つ．ここでTは任意の正の数，$l$ は $l(0)=0$ となる正値単調増大な関数で，T及び初期値とその導関数にのみ依存する．

注意　$f(0)\neq 0$ の場合に条件A，Bに対応する条件は，

条件A′　$df(u)/du \geqq 0$.　$\tilde{F}(u)=\int_0^u (f(v)-f(0))dv \geqq 0$

条件B′　$|f(u)-f(0)| \leqq K(|u|+u^2+u^3+u^4)$

である．

定理2の証明

まず証明に必要な補題を述べる．

補題4　(Sobolev の不等式)

任意の関数 $u(x)\in H^1(R^2)$ に対して，不等式

$$\|u\|_{L^q(R^2)} \leqq 2^\alpha \|u_x\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha} \qquad q\geqq 2:\ \text{integer} \tag{2.13}$$

がなりたつ．ここで $\alpha=(q-2)/2q$　($q=\infty$ のとき $\alpha=\frac{1}{2}$)

定理2の証明は $k=0,1,2$，についてだけ行う．$k\geqq 3$ の

場合は，$k=2$ の時の評価を用いることによって，容易に．逐次的に証明できる．

(1.4)式に $u(x,t)$ を乗じて $x$ に関し積分すれば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\mu\|u_x\|^2=0.$$

これから

$$(2.14)\qquad \|u\|^2\leqslant\|u_0\|^2,\quad \mu\int_0^T\|u_x\|^2dt\leqslant\frac{1}{2}\|u_0\|^2$$

が従う．

次に
$$I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(u(x,t))+\frac{\delta}{2}u_x^2\right)dx$$

とおく． $I(t)$ を $t$ に関して微分し，(1.4)式を用いれば

$$\begin{aligned}dI(t)/dt&=\int_{-\infty}^{\infty}(f(u)u_t+\delta u_x u_{xt})dx\\&=\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(u)u_{xx}\,dx-\delta\mu\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2\,dx\end{aligned}$$

となる．従って上式を $0$ から $T$ まで積分すれば

$$\begin{aligned}(2.15)\qquad &\frac{\delta}{2}\|u_x\|^2+\delta\mu\int_0^T\|u_{xx}\|^2dt\\&=\mu\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}f(u)u_{xx}\,dx\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}F(u(x,t))dx\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}F(u_0(x))dx+\frac{\delta}{2}\|u_{0x}\|^2.\end{aligned}$$

1) $f$ が条件Aを満足する時．

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(u(x,t))dx\geqslant 0$$

$$\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(u)u_{xx}\,dx=-\mu\int_{-\infty}^{\infty}f'(u)u_x^2\,dx\leqslant 0$$

従って (2.15)式から

$$(2.16)\qquad \|u_x\|\leqslant l(\|u_0\|_1),\quad \mu\int_0^T\|u_{xx}\|^2dt\leqslant l(\|u_0\|_1)$$

が従う.

2) $f$ が条件Bを満足する時.

補題4と評価(2.14)を用いれば

(2.17) $$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u(x,t))|^2dx \leqq K_1\|u_x\|^2+K_2$$

(2.18) $$\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(u(x,t))dx\right| \leqq \frac{\delta}{4}\|u_x\|^2+K_3$$

が得られる. 従って

(2.19) $$\begin{aligned}&\mu\left|\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}f(u)u_{xx}\,dx\,dt\right|\\ &\leqq \frac{\mu\delta}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2\,dx\,dt+\frac{\mu}{2\delta}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2dx\,dt\\ &\leqq \frac{\mu\delta}{2}\int_0^T\|u_{xx}\|^2dt+\frac{\mu}{2\delta}\int_0^T(K_1\|u_x\|^2+K_2)\,dt\\ &\leqq \frac{\mu\delta}{2}\int_0^T\|u_{xx}\|^2dt+C\end{aligned}$$

但し $C$ は $u_0$ と $T$ のみに依存する正の定数である.

(2.15)式に不等式(2.18), (2.19)を適用すれば, 条件Aの場合と同様に(2.16)が得られる.

以上の評価(2.14), (2.16)から, 補題4によって

(2.20) $$\sup_{\substack{x\in R^1\\ 0\leqq t\leqq T}}|u(x,t)|<C$$

がなりたつ. そこで

$$U=\{u \mid \sup_{\substack{x\in R^1\\ 0\leqq t\leqq T}}|u(x,t)|<C\}$$

$$M_k=\sup_U|d^kf(u)/du^k| \qquad k=1,2,\cdots$$

とおく.

次に
$$J(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}^2\,dx-\frac{5}{3\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,u_{xx}\,dx$$
と置く. $J(t)$ を $t$ に関して微分し，方程式 (1.4) を用いると

$$(2.21)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J(t)=&-\frac{1}{24}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^5\, f^{(4)}(u)\,dx-\mu\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}^2\,dx\\&+\frac{5\mu}{6\delta}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}\, f'(u)\,u_x\,dx-\frac{5}{6\delta}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\, f'(u) f'(u)\,u_x\,dx\\&-\frac{5\mu}{6\delta}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\, f''(u)\,u_{xx}\,dx\end{aligned}\right.$$

となる. 但し $f^4(u)=d^4f(u)/du^4$.

ところで，補題4と評価 (2.14), (2.16), (2.20) を用いれば

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_x^5\, f^{(4)}(u)\,dx\right|\leq M_4\sup|u_x|^3\,\|u_x\|^2\leq M_4\|u_x\|^{\frac{7}{2}}\,\|u_{xx}\|^{\frac{3}{2}}$$
$$\leq 24\,\|u_{xx}\|^2+C$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}\, f'(u)\,u_x\,dx\right|\leq M_1\|u_x\|\,\|u_{xxx}\|$$
$$\leq \frac{3\delta}{10}\|u_{xxx}\|^2+C$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\, f'(u) f'(u)\,u_x\,dx\right|\leq M_1^2\,\|u_x\|\,\|u_{xx}\|$$
$$\leq\frac{6\delta}{5}\|u_{xx}\|^2+C$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\, f''(u)\,u_{xx}\,dx\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|u_x f'''(u)\,u_x\,u_{xx}|\,dx+\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_x\, f''(u)\,u_{xxx}\,dx\right|$$
$$\leq M_2\sup|u_x|\,\|u_x\|\,\|u_{xx}\|+M_1\|u_x\|\,\|u_{xxx}\|$$
$$\leq M_2\|u_x\|^{\frac{3}{2}}\|u_{xx}\|^{\frac{3}{2}}+M_1\|u_x\|\,\|u_{xxx}\|$$
$$\leq\frac{6\delta}{5\mu}\|u_{xx}\|^2+\frac{3\delta}{10}\|u_{xxx}\|^2+C$$

従って

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}^2\,dx-\frac{5}{3\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,u_{xx}\,dx\right)$$
$$\leq 3\|u_{xx}\|^2-\frac{\mu}{2}\|u_{xxx}\|^2+C$$

上式をtに関して0からTまで積分すれば，

$$\|u_{xx}\|^2 - \frac{5}{3\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,u_{xx}\,dx + \mu\int_0^T \|u_{xxx}\|^2 dt$$
$$\leqslant \|u_{0xx}\|^2 - \frac{5}{3\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(u_0(x))\,u_{0xx}\,dx$$
$$+ 6\int_0^T \|u_{xx}\|^2 dt + T\cdot C$$

ところで

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,u_{xx}\,dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f'(u)\,u_x^2\,dx\right| \leqslant M_1 \|u_x\|^2 \leqslant C$$

$\therefore$

$$\|u_{xx}\|^2 + \mu\int_0^T \|u_{xxx}\|^2 dt \leqslant \|u_{0xx}\|^2 - \frac{5}{3\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(u_0(x))\,u_{0xx}\,dx + C(T)$$
$$+ 6\int_0^T \|u_{xx}\|^2 dt$$

上の不等式から直ちに

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_{xx}\| \leqslant l(\|u_0\|_2)$$

が従う．従って，評価(2.14)，(2.16)と合わせれば

(2.2) $$\sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_2 \leqslant l(\|u_0\|_2)$$

となる．（証明終り）

定理1と2を結びつければ，次の大域的存在定理を得る．

<u>定理3</u>

fは定理2の条件を満足するとする．このとき，全ての初期関数 $u_0(x) \in H^{3(m+1)}(R^1)$ に対して，問題(2.1)は任意の有界区間 $0 \leqslant t \leqslant T$ において，一意的な解

$u(x,t) \in L^{\infty}(0,T;H^{3(m+1)}(R)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)] \cap \cdots \cap C^m[0,T;L^2(R^1)]$

を持つ.

一意性の証明は通常の energy method で証明できる.

次に, 初期値問題

$$(2.23) \qquad \begin{cases} u_t - (f(u))_x + \delta u_{xxx} = 0 & \delta > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

を考えよう.

問題 (2.1) の解 $u_\mu(x,t)$ において $\mu \to 0$ とすれば, 問題 (2.23) に関して次の定理を得る.

定理 4.

$f$ は定理 2 の仮定を満足するとしよう. このとき

$u_0(x) \in H^{3(m+1)}(R^1)$ ならば, 問題 (2.23) は一意的な解

$u(x,t) \in L^{\infty}(0,T;H^{3(m+1)}(R^1)) \cap C[0,T;H^{3m}(R^1)] \cap \cdots \cap C^m[0,T;L^2(R^1)]$

を持つ.

定理 4 の証明

$0 < \mu \leqslant \mu_0$ ($\mu_0$: fixed number) とする. このとき定理 2 で述べた問題 (2.1) の解 $u_\mu(x,t)$ の a priori 評価は $\mu$ に依存しない. 即ち

$$(2.24) \qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u_\mu(x,t) \|_{3(m+1)} \leqslant C.$$

従ってある関数 $u$ と関数列 $\{u_n\}$ の適当な部分列（それを再び $\{u_n\}$ と書く）が存在して

$$\partial^k u_n/\partial x^k \longrightarrow \partial^k u/\partial x^k \quad \text{in } L^\infty(0,T;\ L^2(R^1)) \quad \text{weakly*}$$

$$k=0,1,2,\cdots,\ 3(m+1)$$

$$\partial u_n/\partial t \longrightarrow \partial u/\partial t \quad \text{in } L^\infty(0,T;\ H^{3m}(R^1)) \quad \text{weakly*}$$

となる．

あとは非線形項だけが問題であるが，方程式 (1.4) と評価 (2.24) を用いれば，関数列 $\{u_n\}$ が $L^\infty(0,T,\ H^{3m+2}(R^1))$ で Cauchy 列をなすことが示せて

$$(f(u_n))_x \longrightarrow (f(u))_x \quad \text{in } L^\infty(0,T;\ H^{3m+1}(R^1)) \quad \text{strongly}$$

となる．

一意性は通常の energy method で示せる．

（証明終り）

初期値－周期境界値問題

$$(2.25)\quad \begin{cases} u_t - (f(u))_x + \delta u_{xxx} = \mu u_{xx}, & \delta, \mu > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) & \text{for all } t \geqq 0 \end{cases}$$

$$(2.25')\quad \begin{cases} u_t - (f(u))_x + \delta u_{xxx} = 0, & \delta > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) & \text{for all } t \geqq 0 \end{cases}$$

に対しても上述の方法を適用することができる．

§3.

$f(u) = u^{2g}$, $g=3,4,\cdots$ に対しても初期値を小さく制限すれば大域解の一意存在定理を得ることが出来るが紙数の関係で割愛する.

参考文献

[1]. N. J. Zabusky, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, New York 223 (1967)

[2] "ソリトンの研究" 数理解析研究所講究録. 83 (1970)

[3] A. Sjöberg, Uppsala Univ. Dep. of Computer Sci. Report, (1967)

[4] Y. Kametaka, Proc. Japan Acad. vol 45 (1969)

[5] R. Teman, J. Math. pures et appl. 48 (1969)

[6] T. Mukasa and R. Iino, Math. Japonicae, vol 14, (1969)

[7] K. Masuda. preprint.

[8]. M. Tsutsumi, T. Mukasa and R. Iino, preprint.